

定理计算合集

春雨寻风

2023 年 3 月 21 日

目录

1	命题逻辑的基本概念	2
1.1	命题	2
1.2	命题联结词及真值表	2
1.3	合式公式	2
1.4	命题形式化	3
1.5	波兰表达式	3
2	命题逻辑的等值和推理演算	3
2.1	等值定理	3
2.2	等值公式	4

1 命题逻辑的基本概念

1.1 命题

定义 (命题). 命题是一个非真即假 (不可兼) 的陈述句.

定义 (命题变元). 当 P 表示任意命题时, P 就称为命题变项 (变元). 命题变项与命题的区别好像变量与常量的关系.

定义 (原子命题). 简单命题又称原子命题, 它是不包含任何的与、或、非一类联结词的命题.

定义 (复合命题). 把一个或几个简单命题用联结词 (如与、或、非) 联结所构成的新的命题称为复合命题, 也成为分子命题.

1.2 命题联结词及真值表

定理. $P \rightarrow Q = \neg P \vee Q$.

定理. $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P) = P \leftrightarrow Q$.

1.3 合式公式

定义 (合式公式). 合式公式 (简记为 Wff) 的定义:

1. 简单命题是合式公式.
2. 如果 A 是合式公式, 那么 $\neg A$ 也是合式公式.
3. 如果 A, B 是合式公式, 那么 $(A \wedge B), (A \vee B), (A \rightarrow B)$ 和 $(A \leftrightarrow B)$ 是合式公式.
4. 当且仅当经过有限次地使用 (1), (2), (3) 所组成的符号串才是合式公式.

定义 (重言式). 如果一个公式, 对于它的任一解释 I 下其值都为真, 就称为重言式 (永真式).

推论. 由 $\vee, \wedge, \rightarrow$ 和 \leftrightarrow 联结的重言式仍是重言式.

定义 (可满足的公式). 一个公式, 若有某个解释 I_0 , 在 I_0 下该公式真值为真, 则称这个公式是可满足的.

推论. 重言式是可满足的.

定义 (矛盾式). 如果一个公式, 对于它的任一解释 I 下真值都是假, 便称是矛盾式.

推论. 不难看出这三类公式间有如下关系:

1. 公式 A 永真, 当且仅当 $\neg A$ 为假.
2. 公式 A 可满足, 当且仅当 $\neg A$ 非永真.
3. 不是可满足的公式必永假.
4. 不是永假的公式必可满足.

定义 (代入规则). 对代入规则, 要求:

1. 公式中被代换的只能是命题变元 (原子命题, 而不能是复合命题).
2. 对公式中某命题变项施以代入, 必须对该公式中出现的所有同一命题变项代换同一公式.

推论. A 是一个公式, 对 A 使用代入规则得到公式 B , 若 A 是重言式, 则 B 也是重言式.

1.4 命题形式化

1.5 波兰表达式

2 命题逻辑的等值和推理演算

2.1 等值定理

定义 (等值). 给定两个命题公式 A 和 B , 而 P_1, P_2, \dots, P_n 是出现于 A 和 B 中的所有命题变项, 那么公式 A 和 B 共有 2^n 个解释, 若在其中的任一解释下, 公式 A 和 B 的真值都相等, 就称 A 和 B 是等值的 (或称等价). 记作 $A = B$ 或者 $A \Leftrightarrow B$.

定理 2.1.1. 对公式 A 和 B , $A = B$ 的充分必要条件是 $A \leftrightarrow B$ 是重言式.

定理 (等值的性质). 一般不将 $=$ 看作联结词, 而是看成表示公式 A 与 B 的一种关系. 这种关系具有 3 个性质:

1. 自反性. $A = A$.
2. 对称性. 若 $A = B$, 则 $B = A$.
3. 传递性. 若 $A = B$, $B = C$, 则 $A = C$.

2.2 等值公式

定理. 以下是一些基本的等值公式 (命题定律).

1. 双重否定律

$$\neg\neg P = P.$$

2. 结合律

$$(P \vee Q) \vee R = P \vee (Q \vee R).$$

$$(P \wedge Q) \wedge R = P \wedge (Q \wedge R).$$

$$(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow R = P \leftrightarrow (Q \leftrightarrow R).$$

$$(P \rightarrow Q) \rightarrow R \neq P \rightarrow (Q \rightarrow R).$$

3. 交换律

$$P \vee Q = Q \vee P.$$

$$P \wedge Q = Q \wedge P.$$

$$P \leftrightarrow Q = Q \leftrightarrow P.$$

$$P \rightarrow Q \neq Q \rightarrow P.$$

4. 分配律

$$P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge (P \vee R).$$

$$P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R).$$

$$P \rightarrow (Q \rightarrow R) = (P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \rightarrow R).$$

$$P \leftrightarrow (Q \leftrightarrow R) \neq (P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (Q \leftrightarrow R).$$

5. 等幂律 (恒等律)

$$P \wedge P = P.$$

$$P \vee P = P.$$

$$P \rightarrow P = T.$$

$$P \leftrightarrow P = T.$$

6. 吸收律

$$P \wedge (P \vee Q) = P.$$

$$P \vee (P \wedge Q) = P.$$

7. 摩根律

$$\neg(P \vee Q) = \neg P \wedge \neg Q.$$

$$\neg(P \wedge Q) = \neg P \vee \neg Q.$$

对蕴含词、双条件词作否定有

$$\neg(P \rightarrow Q) = P \wedge \neg Q .$$

$$\neg(P \leftrightarrow Q) = \neg P \leftrightarrow Q = P \leftrightarrow \neg Q = (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) .$$

8. 同一律

$$P \vee F = P .$$

$$P \wedge T = P .$$

$$T \rightarrow P = P .$$

$$T \leftrightarrow P = P .$$

还有

$$P \rightarrow F = \neg P .$$

$$F \leftrightarrow P = \neg P .$$

9. 零律

$$P \vee T = T .$$

$$P \wedge F = F .$$

还有

$$P \rightarrow T = T .$$

$$F \rightarrow P = T .$$

10. 补余律

$$P \vee \neg P = T .$$

$$P \wedge \neg P = F .$$

还有

$$P \rightarrow \neg P = \neg P .$$

$$\neg P \rightarrow P = P .$$

$$P \leftrightarrow \neg P = F .$$

11. $P \rightarrow Q = \neg P \vee Q.$

12. $P \rightarrow Q = \neg Q \rightarrow \neg P.$

13. $P \rightarrow (Q \rightarrow R) = (P \wedge Q) \rightarrow R.$

14. $P \leftrightarrow Q = (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q).$

15. $P \leftrightarrow Q = (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q).$

$$16. P \leftrightarrow Q = (P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q).$$

$$17. P \leftrightarrow Q = (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P).$$

$$18. P \rightarrow (Q \rightarrow R) = Q \rightarrow (P \rightarrow R).$$

$$19. (P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R) = (P \vee Q) \rightarrow R.$$

定义 (置换规则). 对公式 A 的子公式, 用与之等值的公式代换称为置换.

推论. 公式 A 的子公式置换后, A 化为公式 B , 必有 $A = B$.