数学分析定理手册

aytony

2023 年 5 月 28 日

目录

1 集合与映射

1.1 集合

定理 1.1.1. 可列个可列集之并也是可列集.

定理 1.1.2. 有理数集 $\mathbb{Q}$ 是可列集.

例 1.1.2. 整数集 $\mathbb{Z}$ 是可列集.

1.2 映射与函数

定理 1.2.1 (三角不等式). 对于任意实数 a 和 b，都有

$$||a|-|b|| \leqslant |a+b| \leqslant |a|+|b| .$$

定理 1.2.2 (平均值不等式). 对任意 n 个正数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，有

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \geqslant \frac{n}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}} ,$$

等号当且仅当 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 全部相等时成立.

2 数列极限

2.1 实数系的连续性

定理 2.1.1 (确界存在定理，实数系的连续性). 非空有上界的数集必有上确界，非空有下界的数集必有下确界.

定理 2.1.2 (确界唯一性定理). 非空有界数集的上（下）界是唯一的.

定理 (Dedekind 分割定理). 设 $\tilde{A}/\tilde{B}$ 是实数集 $\mathbb{R}$ 的一个切割，则或者 $\tilde{A}$ 有最大数，或者 $\tilde{B}$ 有最小数.

2.2 数列极限

定理 2.2.1 (极限的唯一性). 收敛数列的极限必唯一.

定理 2.2.2 (极限的有界性). 收敛数列必有界.

定理 2.2.3 (极限的保序性). 设数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 均收敛，若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$，且 $a < b$，则存在正整数 N，当 $n > N$ 时，成立

$$x_n < y_n \, .$$

推论 (极限的保号性). 1. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b > 0$，则存在正整数 N，当 $n > N$ 时，

$$y_n > \frac{b}{2} > 0 \, ;$$

2. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b < 0$，则存在正整数 N，当 $n > N$ 时，

$$y_n < \frac{b}{2} < 0 \, ;$$

定理 2.2.4 (极限的夹逼性). 若三个数列 $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ 从某项开始成立

$$x_n \leqslant y_n \leqslant z_n \, , \quad n > N_0 \, ,$$

且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

定理 2.2.5 (极限的四则运算). 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$，则

1. $\lim\limits_{n\to\infty} (\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha a + \beta b$（$\alpha$，$\beta$ 是常数）;
2. $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n y_n) = ab$;
3. $\lim\limits_{n\to\infty} (\dfrac{x_n}{y_n}) = \dfrac{a}{b}$ $(b \neq 0)$.

例 2.2.2. $\{q^n\}$ $(0 < |q| < 1)$ 是无穷小量.

例 2.2.4. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

例 2.2.6. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a \, .$$

例 2.2.7. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=0$.

例 2.2.8.

$$\lim_{n\to\infty}(a_1^n+a_2^n+\cdots+a_p^n)^{\frac{1}{n}}=\max_{1\leqslant i\leqslant p}\{a_i\}\,,$$

其中 $a_i\geqslant 0\ (i=1,2,3,\cdots,p)$.

例 2.2.10. 当 $a>0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

例 2.2.12. 设 $a_n>0$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=a\,.$$

习题 2.2.5. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

习题 2.2.6. 设$\sqrt{x_n}\geqslant 0$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\geqslant 0$，则有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x_n}=\sqrt{a}$.

习题 2.2.7. $\{x_n\}$ 是无穷小量，$\{y_n\}$ 是有界数列，则 $\{x_ny_n\}$ 是无穷小量.

2.3 无穷大量

定理 2.3.1. 设 $x_n\neq 0$，则 $\{x_n\}$ 是无穷大量的充分必要条件是 $\{\dfrac{1}{x_n}\}$ 是无穷小量.

定理 2.3.2. 设 $\{x_n\}$ 是无穷大量，若当 $n>N_0$ 时，$\{y_n\}\geqslant\delta>0$ 成立，则 $\{x_ny_n\}$ 是无穷大量.

推论. 设 $\{x_n\}$ 是无穷大量，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b\neq 0$，则 $\{x_ny_n\}$ 与 $\{\dfrac{x_n}{y_n}\}$ 都是无穷大量.

定理 2.3.3 (Stolz 定理). 设 $\{y_n\}$ 是严格单调增加的正无穷大量，且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=a\quad（a\text{ 可以为有限量，}+\infty\text{ 与 }-\infty），$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=a\,.$$

例 2.3.1. 设 $|q|>1$，则 $\{q^n\}$ 是无穷大量.

例 2.3.3.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_0n^k+a_1n^{k-1}+\cdots+a_{k-1}n+a_k}{b_0n^l+b_1n^{l-1}+\cdots+b_{l-1}n+b_l}=\begin{cases}0, & k<l,\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & k=l,\\ \infty, & k>l\,.\end{cases}$$

例 2.3.4.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}=\frac{1}{k+1}\,.$$

例 2.3.5. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n^2}=\frac{a}{2}\,.$$

2.4 收敛准则

定理 2.4.1 (单调有界定理). 单调有界数列必定收敛.

定理 2.4.2 (闭区间套定理). 如果 $\{[a_n,b_n]\}$ 形成一个闭区间套，则存在唯一的实数 ξ 属于所有的闭区间 $[a_n,b_n]$，且 $\xi=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$.

定理 2.4.3. 实数集 $\mathbb{R}$ 是不可列集.

定理 2.4.4. 若数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，则它的任何子列 $\{x_{n_k}\}$ 也收敛于 a，即

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a\quad\Rightarrow\quad\lim_{n\to\infty}n_{n_k}=a\,.$$

定理 2.4.5 (Bolzano–Weierstrass 定理). 有界数列必有收敛子列.

定理 2.4.6. 若 $\{x_n\}$ 是一个无界数列，则存在子列 $\{x_{n_k}\}$，使得

$$\lim_{n\to\infty}x_{n_k}=\infty\,.$$

定理 2.4.7 (Cauchy 收敛原理，实数系的完备性). 数列 $\{x_n\}$ 收敛的充分必要条件是：$\{x_n\}$ 是基本数列.

定理 2.4.8. 实数系的完备性等价于实数系的连续性.

例 2.4.1. 设 $x_1>0$，$x_{n+1}=1+\dfrac{x_n}{1+x_n}$，$n=1,2,3,\cdots$. 则有数列 $\{x_n\}$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

例 2.4.2. 设 $0 < x_1 < 1, x_{n+1} = x_n(1-x_n), n = 1, 2, 3, \cdots$. 则 $\{x_n\}$ 收敛，且 $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

推论. $\lim_{n\to\infty}(nx_n) = 1$，故 x_n 与 $\frac{1}{n}$ 为等价无穷小.

例 2.4.4 (Fibonacci **数列**)**.** 设 $\{a_n\}$ 为 Fibonacci 数列，则有 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

例 2.4.5. 数列 $\{n \sin \frac{180^\circ}{n}\}$ 收敛.

注. 定义 π 后，利用弧度制可以将以上极限式写成

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(\pi/n)}{\pi/n} = 1 .$$

例 2.4.6. 数列 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ 单调增加，数列 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$ 单调减少，两者收敛于同一极限.

推论.

$$\frac{1}{n+1} < \ln(1+\frac{1}{n}) < \frac{1}{n} .$$

例 2.4.7. 讨论数列 $\{a_n\}$，其中

$$a_n = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} \quad (p > 0) .$$

当 $p > 1$ 时，数列 $\{a_n\}$ 收敛；当 $0 < p \leqslant 1$ 时，数列 $\{a_n\}$ 是正无穷大量.

例 2.4.8. 记 $b_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$，则数列 $\{b_n\}$ 收敛.

例 2.4.14. 设数列 $\{x_n\}$ 满足压缩性条件：

$$|x_{n+1} - x_n| \leqslant k|x_n - x_{n-1}|, \quad 0 < k < 1, n = 2, 3, \cdots ,$$

则 $\{x_n\}$ 收敛.

3　函数极限与连续函数

3.1　函数极限

定理 3.1.1 (**极限的惟一性**)**.** 设 A 与 B 都是函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的极限，则 $A = B$.

定理 3.1.2 (局部保序性). 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$，（此处 A，B 可以是非 ∞ 的广义极限）且 $A>B$，则存在 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，成立

$$f(x)>g(x)\,.$$

推论. 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A\neq 0$（此处 A 可以是非 ∞ 的广义极限），则存在 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，成立

$$|f(x)|>\frac{|A|}{2}\,.$$

推论. 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A, \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$，（此处 A，B 可以是非 ∞ 的广义极限）且存在 $r>0$，使得当 $0<|x-x_0|<r$ 时，成立 $g(x)\leqslant f(x)$，则

$$B\leqslant A\,.$$

推论 (局部有界性). 若 $\lim\limits_{x\to x_0} x=A$，则存在 $\delta>0$，使得 $f(x)$ 在 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 中有界.

定理 3.1.3 (极限的夹逼性). 若存在 $r>0$，使得当 $0<|x-x_0|<r$ 时，成立

$$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)\,,$$

且 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$（此处 A 可以是非 ∞ 的广义极限）.

定理 3.1.4 (函数极限的四则运算). 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A, \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$，则

1. $\lim\limits_{x\to x_0}(\alpha f(x)+\beta g(x))=\alpha A+\beta B$（$\alpha,\beta$ 是常数）;
2. $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)g(x))=AB$;
3. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}\quad(B\neq 0)$.

要求以上各式可以是广义极限，但不为待定型.

定理 3.1.5 (Heine 定理). $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 的充分必要条件是：对于任意满足 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$，且 $x_n\neq x_0\ (n=1,2,3,\cdots)$ 的数列 $\{x_n\}$，相应的函数值数列 $\{f(x_n)\}$ 成立

$$\lim_{n\to\infty} f(x)=A\,.$$

推论. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在的充分必要条件是：对于任意满足条件 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$ 且 $x_n\neq x_0$ $(n=1,2,3,\cdots)$ 的数列 $\{x_n\}$，相应的函数值数列 $\{f(x_n)\}$ 收敛.

定理. 函数 $f(x)$ 在 x_0 极限存在的充分必要条件是 $f(x)$ 在 x_0 的左极限与右极限存在并且相等.

定理 3.1.6. 函数极限 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x)$ 存在而且有限的充分必要条件是：对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $X>0$，使得对于一切 $x',x''>X$，成立

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon\,.$$

推论. 可以对应给出函数极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x), \lim\limits_{x\to x_{0+}} f(x), \lim\limits_{x\to x_{0-}} f(x), \lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ 存在而且有限的 Cauchy 收敛原理.

例 3.1.4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1.$

推论. 在 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时，有 $\sin x<x<\tan x.$

例 3.1.5. 对于任意实数 $\alpha\neq 0$，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{x}=\alpha\,;$$

对于任意实数 $\alpha,\beta\neq 0$，则有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}=\frac{\alpha}{\beta}\,.$$

例 3.1.6. $\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $x=0$ 没有极限.

例 3.1.12.

$$L=\lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_kx^k}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_jx^j}=\begin{cases}\dfrac{a_n}{b_n}, & n=m,\\[2ex] 0, & n<m\,,\\[2ex] \infty, & n>m\,.\end{cases}$$

$$l=\lim_{x\to 0}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_kx^k}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_jx^j}=\begin{cases}\dfrac{a_k}{b_k}, & k=j,\\[2ex] 0, & k>j\,,\\[2ex] \infty, & k<j\,.\end{cases}$$

例 3.1.13. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e.$

推论. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x=\dfrac{1}{e}.$

3.2 连续函数

定理 (连续函数的四则运算). 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0), \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=g(x_0)$，则

1. $\lim\limits_{x\to x_0}(\alpha f(x)+\beta g(x))=\alpha f(x_0)+\beta g(x_0)$（$\alpha,\beta$ 是常数）；

2. $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)g(x))=f(x_0)g(x_0)$；

3. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}\ (g(x_0)\neq 0)$.

定理 3.2.1 (反函数存在性定理). 若函数 $y=f(x)$，$x\in D_f$ 是严格单调增加（减少）的，则存在它的反函数 $x=f^{-1}(y), y\in R_f$，并且 $f^{-1}(y)$ 也是严格单调增加（减少）的.

定理 3.2.2 (反函数连续性定理). 设函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续且严格单调增加，$f(a)=\alpha, f(b)=\beta$，则它的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 连续且严格单调增加.

定理 3.2.3 (复合函数的连续性). 若 $y=g(x)$ 在点 x_0 连续，$g(x_0)=u_0$，又 $y=f(u)$ 在点 u_0 连续，则复合函数 $f\circ g(x)$ 在点 x_0 连续.

推论. 若 $f(x)$ 在 x_0 连续，则有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f\left(\lim\limits_{x\to x_0} x\right)$.

定理 3.2.4. 一切初等函数在其定义区间上连续.

例 3.2.7. 设 Riemann 函数 $R(x)$ 定义如下：

$$R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{p}, & x=\dfrac{q}{p}\ (p\in\mathbb{N}^+, q\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}，p,q\text{ 互素}),\\ 1, & x=0,\\ 0, & x\text{是无理数},\end{cases}$$

其中定义 $R(0)=1$ 是因为 $x=0$ 可写成 $x=\dfrac{0}{1}$，同时也保证了 $R(x)$ 的周期性.

有 $R(x)$ 在任意点 x_0 的极限都存在，且极限值为 0. 换言之，一切无理点是 $R(x)$ 的连续点，而一切有理点是 $R(x)$ 的第三类不连续点.

例 3.2.8. 区间 (a,b) 上单调函数的不连续点必为第一类不连续点.

3.3 无穷大量

定理. $f(x) \to A \Leftrightarrow f(x) = A + o(1)$.

推论. $\alpha \sim \beta \Leftrightarrow \beta = \alpha + o(\alpha)$.

定理 3.3.1 (等价量替换定理). 设 $u(x), v(x)$ 和 $w(x)$ 在 x_0 的某个去心邻域 $\mathring{U}$ 上有定义，且 $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{v(x)}{w(x)} = 1$（即 $v(x) \sim w(x)(x \to x_0)$），那么

1. 当 $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)w(x) = A$ 时，$\lim\limits_{x\to x_0} u(x)v(x) = A$.
2. 当 $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{u(x)}{w(x)} = A$ 时，$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{u(x)}{v(x)} = A$.

例. $\sin \sim x(x \to 0), 1 - \cos x \sim \dfrac{1}{2}x^2(x \to 0)$.

推论. $\arcsin x \sim x(x \to 0), \tan x \sim x(x \to 0), \arctan x \sim x(x \to 0)$.

例 3.3.1. $x = o\left(\left(\dfrac{-1}{\ln x}\right)^k\right)(x \to 0^+, k \in \mathbb{N}^+)$.

例 3.3.2. $e^{-\frac{1}{x}} = o(x^k)(x \to 0^+, k \in \mathbb{N}^+)$.

例 3.3.3. $\ln(1 + x) \sim x(x \to 0)$.

例 3.3.4. $e^x - 1 \sim x(x \to 0)$.

例 3.3.5. $(1 + x)^\alpha - 1 \sim \alpha x(x \to 0)$.

例 3.3.8.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n + a_{n+1}x^{n+1} + \cdots + a_m x^m}{b_n x^n + b_{n+1}x^{n+1} + \cdots + b_m x^m} &= \lim_{x\to\infty} \frac{a_m x^m}{b_m x_m} = \frac{a_m}{b_m} \quad (a_m, b_m \neq 0)\ , \\
\lim_{x\to 0} \frac{a_n x^n + a_{n+1}x^{n+1} + \cdots + a_m x^m}{b_n x^n + b_{n+1}x^{n+1} + \cdots + b_m x^m} &= \lim_{x\to 0} \frac{a_n x^n}{b_n x_n} = \frac{a_n}{b_n} \qquad (a_n, b_n \neq 0)\ .
\end{aligned}$$

3.4 闭区间上的连续函数

定理 3.4.1 (有界性定理). 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，则它在 $[a, b]$ 上有界.

定理 3.4.2 (最值定理). 若函数 $f(x)$ 在闭区间 a, b 上连续，则它在闭区间 a, b 上必能取到最大值与最小值，记存在 ξ 和 $\eta \in [a, b]$，对于一切 $x \in [a, b]$，成立

$$f(\xi) \leqslant f(x) \leqslant f(\eta)\ .$$

定理 3.4.3 (零点存在定理). 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)\cdot f(b)<0$，则一定存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=0$.

定理 3.4.4 (介值定理). 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则它一定能取到最大值 $M=\max\{f(x)\,|\,x\in[a,b]\}$ 和最小值 $m=\min\{f(x)\,|\,x\in[a,b]\}$ 之间的任何一个值.

定理 3.4.5. 设函数 $f(x)$ 在区间 X 上定义，则 $f(x)$ 在 X 上一致连续的充分必要条件是：对任何点列 $\{x'_n\}(x'_n\in X)$ 和 $\{x''_n\}(x''_n\in X)$，只要满足 $\lim\limits_{n\to\infty}(x'_n-x''_n)=0$，就成立 $\lim\limits_{n\to\infty}(f(x'_n)-f(x''_n))=0$.

定理 3.4.6 (Cantor 定理). 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则它在 $[a,b]$ 上一致连续.

定理 3.4.7. 若函数 $f(x)$ 在有限开区间 (a,b) 上连续，则 $f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续的充分必要条件是：$f(a^+)$ 与 $f(b^-)$ 存在.

4 微分

4.1 微分和导数

定理 4.1.1. 函数 $f(x)$ 在 x 处可微的充分必要条件是 $f(x)$ 在 x 处可导.

4.2 导数的意义和性质

4.3 导数四则运算和反函数求导法则

定理 4.3.1 (加法求导法则). 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在某一区间上是可导的，则对任意常数 c_1 和 c_2，它们的线性组合 $c_1f(x)+c_2g(x)$ 也在该区间上可导，且满足如下线性关系

$$[c_1f(x)+c_2g(x)]'=c_1f'(x)+c_2g'(x)\ .$$

定理 4.3.2 (乘法求导法则). 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在某一区间上是可导的，则它们的积函数也在该区间上可导，且满足

$$[f(x)\cdot g(x)]'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\ ;$$

相应的微分表达式为

$$\mathrm{d}[f(x)\cdot g(x)]' = \mathrm{d}[f(x)]g(x) + f(x)\mathrm{d}[g(x)]\ .$$

定理 4.3.3 (倒数求导法则). 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在某一区间上是可导的，且 $g(x)\neq 0$，则它们的商函数也在该区间上可导，且满足

$$[f(x)\cdot g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\ ;$$

相应的微分表达式为

$$\mathrm{d}[f(x)\cdot g(x)]' = \mathrm{d}[f(x)]g(x) + f(x)\mathrm{d}[g(x)]\ .$$

推论 (除法求导法则). 设 $g(x)$ 在某一区间上可导，且 $g(x)\neq 0$，则它的倒数也在该区间上可导，且满足

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}\ ;$$

相应的微分表达式为

$$\mathrm{d}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\mathrm{d}[f(x)] - f(x)\mathrm{d}[g(x)]}{[g(x)]^2}\ .$$

定理 4.3.4 (反函数求导定理). 若函数 $y = f(x)$ 在 (a,b) 上连续、严格单调、可导并且 $f'(x)\neq 0$，记 $\alpha = \min\{f(a^+), g(b^-)\}, \beta = \max\{f(a^+), f(b^-)\}$, 则它的反函数 $x = f^{-1}(y)$ 在 α,β 上可导，且有

$$[f^{-1}(y)]' = \frac{1}{f'(x)}\ .$$

4.4 复合函数求导法则及其应用

定理 4.4.1 (复合函数求导法则). 设函数 $u = g(x)$ 在 $x = x_0$ 可导，而函数 $y = f(u)$ 在 $u = u_0 = g(x_0)$ 处可导，则复合函数 $y = f(g(x))$ 在 $x = x_0$ 可导，且有

$$[f(g(x))]' = f'(u_0)g'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0)\ .$$

4.5 高阶导数和微分

定理 4.5.1 (高阶导数加法求导法则). 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是 n 阶可导的，则对任意常数 c_1 和 c_2，它们的线性组合 $c_1f(x) + c_2g(x)$ 也是 n 阶可导的，且满足如下的线性运算关系

$$[c_1f(x) + c_2g(x)]^{(n)} = c_1f^{(n)}(x) + c_2g^{(n)}(x)\ .$$

定理 4.5.2 (Leibniz 公式). 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是 n 阶可导函数，则它们的积函数也 n 阶可导，且成立公式

$$[f(x)\cdot g(x)]^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x)\ .$$

5 微分中值定理及其应用

5.1 微分中值定理

定理 5.1.1 (Fermat 引理). 设 x_0 是 $f(x)$ 的一个极值点，且 $f(x)$ 在 x_0 处导数存在，则

$$f'(x_0)=0\ .$$

定理 5.1.2 (Rolle 定理). 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 上可导，且 $f(a)=f(b)$，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f'(\xi)=0\ .$$

定理 5.1.3 (Lagrange 中值定理). 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 连续，在开区间 (a,b) 可导，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-b(a)}{b-a}\ .$$

推论. Lagrange 公式也可以写成

$$f(b)-f(a)=f'(a+\theta(b-a))(b-a),\quad (\theta\in(0,1))$$

，或将 a 记为 x，$b-a$ 记为 Δx，则有

$$f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\Delta x)\Delta x,\quad \theta\in(0,1)$$

定理 5.1.4. 若 $f(x)$ 在 (a,b) 上可导且有 $f'(x)\equiv 0$，则 $f(x)$ 在 (a,b) 上恒为常数.

定理 5.1.5 (一阶导数与单调性的关系). 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上可导，则 $f(x)$ 在区间 I 上单调增加的充分必要条件是：对于任一 $x\in I$ 有 $f'(x)\geqslant 0$；

特别地，若对于任一 $x\in I$ 有 $f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 I 上严格单调增加.

定理 5.1.6 (二阶导数与凸性的关系). 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上二阶可导，则 $f(x)$ 在区间 I 上是下凸函数的充分必要条件是：对于任意 $x \in I$ 有 $f''(x) > 0$.

特别地，若对于任意 $x \in I$ 有 $f''(x) > 0$，则 $f(x)$ 在 I 上是严格下凸函数.

定理 5.1.7. 设 $f(x)$ 在区间 I 上连续，$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset I$.

1. 设 $f(x)$ 在 $(x_0 - \delta, x_0)$ 与 $(x_0, x_0 + \delta)$ 上二阶可导. 若 $f''(x)$ 在 $(x_0 - \delta, x_0)$ 与 $(x_0, x_0 + \delta)$ 上的符号相反，则点 $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点；若 $f''(x)$ 在 $(x_0 - \delta, x_0)$ 与 $(x_0, x_0 + \delta)$ 上的符号相同，则点 $(x_0, f(x_0))$ 不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

2. 设 $f(x)$ 在 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 上二阶可导，若点 $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点，则 $f''(x) = 0$.

定理 5.1.8 (Jensen 不等式). 若 $f(x)$ 为区间 I 上的下凸（上凸）函数，则对于任意 $x_i \in I$ 和满足 $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ 的 $\lambda_i > 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$，成立

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) \quad \left(f(\sum_{i=1}^{n})\lambda_i x_i \geqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)\right) .$$

特别地，取 $\lambda_i = \dfrac{1}{n} (i = 1, 2, \cdots, n)$，就有

$$f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \quad \left(f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\right) \geqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\right) .$$

定理 5.1.9 (Cauchy 中值定理). 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在闭区间 $[a, b]$ 上连续，在开区间 (a, b) 上可导，且对于任意 $x \in (a, b), g'(x) \neq 0$. 则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$，使得

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} .$$

例 5.1.1 (Legendre 多项式). 如下定义的函数

$$p_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} (x^2 - 1)^n \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

被称为 Legendre 多项式，且 $p_n(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上恰有 n 个不同的根.

例 5.1.3.

$$|\arctan a - \arctan b| \leqslant |a - b| .$$

5.2 L'Hospital 法则

定理 5.2.1 (L'Hospital **法则**). 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $(a,a+d]$ 上可导（d 是某个正常数），且 $g'(x)\neq 0$. 若此时有

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a^+} g(x)=0$$

或

$$\lim_{x\to a^+} g(x)=\infty\ ,$$

且 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 存在（可以为有限或 ∞），则成立

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}\ .$$

5.3 Taylor 多项式和插值多项式

定理 5.3.1 (**带** Peano **余项的** Taylor **多项式**). 设 $f(x)$ 在 x_0 处有 n 阶导数，则存在 x_0 的一个邻域，对于该邻域中的任一点 x，成立

$$f(x)=f(x_0)+f'(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}}{n!}(x-x_0)^n+r_n(x)\ ,$$

其中余项 $r_n(x)$ 满足

$$r_n(x)=o((x-x_n)^n)\ .$$

定理 5.3.2 (**带** Lagrange **余项的** Taylor **多项式**). 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有 n 阶连续导数，且在 (a,b) 上有 $n+1$ 阶导数. 设 $x_0\in[a,b]$ 为一定点，则对于任意 $x\in[a,b]$，成立

$$f(x)=f(x_0)+f'(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}}{n!}(x-x_0)^n+r_n(x)\ ,$$

其中余项 $r_n(x)$ 满足

$$r_n(x)=\frac{f^{(n)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\ .$$

定理 5.3.3 (**插值多项式的余项定理**). 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有 n 阶连续导数，在 (a,b) 上具有 $n+1$ 阶导数，且 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的 $m+1$ 个互异点 $x_0,x_1,\cdots,x_m$ 上的函数值和若干阶导数值 $f^{(j)}(x_i)(i=0,1,\cdots,m,j=0,1,\cdots,n_i-1,\sum\limits_{i=0}^{m}n_i=n+1)$ 是已知的，则对于任意 $x\in[a,b]$，上述插值问题有余项估计

$$r_n(x)=f(x)-p_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{m}(x-x_i)^{n_i}\ ,$$

这里 ξ 是介于 $x_{\min}=\min\{x_0,x_1,\cdots,x_m,x\}$ 和 $x_{\max}\{x_0,x_1,\cdots,x_m,x\}$ 之间的一个数（一般依赖于 x）.

5.4 函数的 Taylor 公式及其应用

定理 5.4.1. 设 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域有 $n+2$ 阶导数存在，则它的 $n+1$ 次 Taylor 多项式的导数恰为 $f'(x)$ 的 n 次 Taylor 多项式.

5.5 应用举例

定理 5.5.1 (极值点判定定理). 设函数 $f(x)$ 在 x_0 点的某一邻域中有定义，且 $f(x)$ 在 x_0 点连续.

1. 设存在 $\delta>0$，使得 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0)$ 与 $(x_0,x_0+\delta)$ 上可导.
   (a) 若在 $(x_0-\delta,x_0)$ 上有 $f'(x)\geqslant 0$，在 $(x_0,x_0+\delta)$ 上有 $f'(x)\leqslant 0$，则 x_0 是 $f(x)$ 的极大值点.
   (b) 若在 $(x_0-\delta,x_0)$ 上有 $f'(x)\leqslant 0$，在 $(x_0,x_0+\delta)$ 上有 $f'(x)\geqslant 0$，则 x_0 是 $f(x)$ 的极小值点.
   (c) 若 $f'(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0)$ 与 $(x_0,x_0+\delta)$ 上同号，则 x_0 不是 $f(x)$ 的极值点.
2. 设 $f'(x_0)=0$，且 $f(x)$ 在 x_0 点二阶可导.
   (a) 若 $f''(x_0)<0$，则 x_0 是 $f(x)$ 的极大值点.
   (b) 若 $f''(x_0)>0$，则 x_0 是 $f(x)$ 的极小值点.
   (c) 若 $f''(x_0)=0$，则 x_0 可能是 $f(x)$ 的极值点，也可能不是 x_0 的极值点.

9 数项级数

9.2 上极限与下级限

定理 9.2.1. E 的上确界 H 和下确界 h 均属于 E，即

$$H=\max E,\quad h=\min E\,.$$

定理 9.2.2. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在（有限数、$+\infty$ 或 $-\infty$）的充分必要条件是

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n\,.$$

定理 9.2.3. 设 $\{x_n\}$ 是有界数列. 则

1. $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} = H$ 的充分必要条件是：对任意给定的 $\varepsilon > 0$，

   (a) 存在正整数 N，使得

   $$x_n < H + \varepsilon$$

   对一切 $n > N$ 成立；

   (b) $\{x_n\}$ 中有无穷多项，满足

   $$x_n > H - \varepsilon\,.$$

2. $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} = h$ 的充分必要条件是：对任意给定的 $\varepsilon > 0$，

   (a) 存在正整数 N，使得

   $$x_n > h - \varepsilon$$

   对一切 $n > N$ 成立；

   (b) $\{x_n\}$ 中有无穷多项，满足

   $$x_n < h + \varepsilon\,.$$

定理 9.2.4 (上下级限的加法运算). 设 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 是两数列，则

1. $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,(x_n + y_n) \leqslant \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n + \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, y_n$，

   $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,(x_n + y_n) \geqslant \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n + \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, y_n$；

2. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，则

   $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,(x_n + y_n) = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n + \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, y_n$，

   $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,(x_n + y_n) = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n + \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, y_n$.

（要求上述诸式的右端不是待定型，即不为 $(+\infty) + (-\infty)$ 等.）

定理 9.2.5 (上下级限的乘法运算). 设 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 是两数列，

1. 若 $x_n \geqslant 0, y_n \geqslant 0$，则

$$\varlimsup_{n\to\infty}(x_n y_n) \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} x_n \cdot \varlimsup_{n\to\infty} y_n\ ,$$

$$\varliminf_{n\to\infty}(x_n y_n) \geqslant \varliminf_{n\to\infty} x_n \cdot \varliminf_{n\to\infty} y_n\ ;$$

2. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x, 0 < x < +\infty$，则

$$\varliminf_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \varlimsup_{n\to\infty} y_n\ ,$$

$$\varlimsup_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \varliminf_{n\to\infty} y_n\ .$$

（要求上述诸式的右端不是待定型，即不为 $0\cdot(+\infty)$ 等.）

定理 9.2.6 (上下级限的第二定义). 设 $\{x_n\}$ 是一个有界数列，记

$$H^* = \lim_{n\to\infty} \sup_{k>n}\{x_k\}\ ,$$

$$h^* = \lim_{n\to\infty} \inf_{k>n}\{x_k\}\ .$$

则 H^* 是 $\{x_n\}$ 的最大极限点，h^* 是 $\{x_n\}$ 的最小极限点.

10 函数项级数

10.1 函数项级数的一致收敛性

定义 (函数项级数). 设 $u_n(x)(n = 1, 2, 3, \cdots)$ 是具有公共定义域 E 的一列函数，我们将这无穷个函数的“和”

$$u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$$

称为**函数项级数**，记为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

定义 10.1.1 (收敛点、收敛域、和函数、点态收敛). 设 $u_n(x)(n = 1, 2, 3, \cdots)$ 在 E 上定义. 对于任一固定的 $x_0 \in E$，若数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 收敛，则称函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在点 x_0 收敛，或称 x_0 是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的**收敛点**.

函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的收敛点全体所构成的集合称为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的**收敛域**.

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的收敛域为 $D \subset E$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 就定义了集合 D 上的一个函数

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x),\ x \in D\ .$$

$S(x)$ 称为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的**和函数**. 由于这是通过逐点定义的方式得到的，因此称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 D 上**点态收敛**于 $S(x)$.

定义 10.1.2 (一致收敛). 设 $\{S_n(x)\}(x \in D)$ 是一函数序列，若对给定的 $\varepsilon > 0$，存在仅与 ε 有关的正整数 $N(\varepsilon)$，当 $n > N(\varepsilon)$ 时，

$$|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$$

对一切 $x \in D$ 成立，则称 $\{S_n(x)\}$ 在 D 上**一致收敛**于 $S(x)$，记为 $S_n(x) \overset{D}{\rightrightarrows} S(x)$.

若函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)(x \in D)$ 的部分和函数序列 $\{S_n(x)\}$，其中 $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$，在 D 上一致收敛于 $S(x)$，则我们称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 D 上一致收敛于 $S(x)$.

定义 10.1.3 (内闭一致收敛). 若对于任意给定的闭区间 $[a,b] ssetD$，函数序列 $\{S_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $S(x)$，则称 $S_n(x)$ 在 D 上**内闭一致收敛**于 $S(x)$.

定理 10.1.1. 设函数序列 $\{S_n(x)\}$ 在集合 D 上点态收敛于 $S(x)$，定义 $S_n(x)$ 与 $S(x)$ 的“距离”为

$$d(S_n, S) = \sup_{x \in D} |S_n(x) - S(x)|\ ,$$

则 $|S_n(x)|$ 在 D 上一致收敛于 $S(x)$ 的充分必要条件是

$$\lim_{n \to \infty} d(S_n, S) = 0\ .$$

推论. 若函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 D 上一致收敛，则函数序列 $\{u_n(x)\}$ 在 D 上一致收敛于 $u(x) \equiv 0$.

11 Euclid 空间上的极限和连续

12 多元函数的微分学

12.1 偏导数与全微分

定理 12.1.1. 设 $D \in \mathbb{R}^2$ 为开集，$(x_0, y_0) \in D$ 为一定点. 如果函数

$$z = f(x, y)$$

在 (x_0,y_0) 可微，那么对于任一方向 $v=(\cos\alpha,\sin\alpha)$，$f$ 在 (x_0,y_0) 点沿方向 v 的方向导数存在，且

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(c_0,y_0)\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\sin\alpha\,.$$

定理 12.1.2. 设函数 $x=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点的某个邻域上存在偏导数，并且偏导数在 (x_0,y_0) 连续，那么 f 在 (x_0,y_0) 点可微.

定理 12.1.3. 如果函数 $z=f(x,y)$ 的两个混合偏导数 f_{xx} 和 f_{yx} 在点 (x_0,y_0) 连续，那么等式

$$f_{xy}(x_0,y_0)=f_{yx}(x_0,y_0)$$

成立.

定理 12.1.4. 向量值函数 f 在 x^0 点可微的充分必要条件是向量值函数 f 的每个坐标分量函数 $f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)(i=1,2,\cdots,m)$ 都在 x^0 点可微. 此时成立微分公式

$$\mathrm{d}y=f'(x^0)\mathrm{d}x\,.$$

12.2 多元复合函数的求导法则

定理 12.2.1 (链式法则). 设 g 在 $(u_0,v_0)\in D_g$ 点可导，即 $x=x(u,v),y=y(u,v)$ 在 (u_0,v_0) 点可偏导. 记 $x_0=x(u_0,v_0),y_0=y(u_0,v_0)$，如果 f 在 (x_0,y_0) 点可微，那么

$$\frac{\partial z}{\partial u}(u_0,v_0)=\frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0)\frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0)+\frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0)\frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0);$$
$$\frac{\partial z}{\partial v}(u_0,v_0)=\frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0)\frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0)+\frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0)\frac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0)\,.$$

定理 12.2.2 (链式法则). 设 g 在 $x^0\in D_g$ 点可到，即 $y_1,y_2,\cdots,y_m$ 在 x^0 点可偏导，且 f 在 $y^0=g(x^0)$ 点可微，则

$$\frac{\partial z}{\partial x_i}(x^0)=\frac{\partial z}{\partial y_1}(y^0)\frac{\partial y_1}{\partial x_i}(x^0)+\frac{\partial z}{\partial y_2}(y^0)\frac{\partial y_2}{\partial x_i}(x^0)+\cdots+\frac{\partial z}{\partial y_m}(y^0)\frac{\partial y_m}{\partial x_i}(x^0),\ i=1,2,\cdots,n\,.$$

上式可以用矩阵表示为

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x_1},\frac{\partial z}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial z}{\partial x_n}\right)_{x=x^0}=\left(\frac{\partial z}{\partial y_1},\frac{\partial z}{\partial y_2},\cdots,\frac{\partial z}{\partial y_n}\right)_{y=y^0}\begin{pmatrix}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n}\\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \frac{\partial y_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n}\end{pmatrix}_{x=x^0}\,.$$

或用向量值函数的导数记号表示为

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(y_0)g'(x_0) \; .$$

定理 12.2.3. 设 $f : D_f(\subset \mathbb{R}^k) \to \mathbb{R}^m$ 与 $g : D_g(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^l$ 分别是多元向量值函数，且分别在 D_f 与 D_g 上具有连续导数. 如果 g 的值域 $g(D_g) \subset D_f$，并记 $u = g(x)$，那么复合向量值函数 $f \circ g$ 在 D_g 上也具有连续的导数，并且成立等式

$$(f \circ g)'(x) = f'(u) \cdot g'(x) = f'[g(x)] \cdot g'(x) \; ,$$

其中 $f'(u), g'(x)$ 和 $(f \circ g)'(x)$ 是相应的导数，即 Jacobi 矩阵.

12.3 中值定理和 Taylor 公式

定理 12.3.1 (中值定理). 设二元函数 $f(x, y)$ 在凸区域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上可微，则对于 D 内任意两点 (x_0, y_0) 和 $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$，至少存在一个 $\theta(0 < \theta < 1)$，使得

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = f_x(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)\Delta x + f_y(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)\Delta y \; .$$

推论. 如果函数 $f(x, y)$ 在区域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上的偏导数恒为零，那么它在 D 上必是常值函数.

定理 12.3.2. 设 n 元函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 在凸区域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上可微，则对于 D 内任意两点 $(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$ 和 $(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, \cdots, x_n^0 + \Delta x_n)$，至少存在一个 $\theta(0 < \theta < 1)$，使得

$$\begin{aligned} & f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, \cdots, x_n^0 + \Delta x_n) - f(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0) \\ = & \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(x_1^0 + \theta\Delta x_1, x_2^0 + \theta\Delta x_2, \cdots, x_n^0 + \theta\Delta x_n)\Delta x_i \; . \end{aligned}$$

定理 12.3.3 (Taylor 公式). 设函数 $f(x, y)$ 在点 x_0, y_0 邻域 $U = O((x_0, y_0), r)$ 上具有 $k + 1$ 阶连续偏导数，那么对于 U 内每一点 $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ 都成立

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + & \left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y}\right) f(x_0, y_0) + \\ & \frac{1}{2!}\left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0, y_0) + \cdots + \\ & \frac{1}{k!}\left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y}\right)^k f(x_0, y_0) + R_k \; . \end{aligned}$$

其中 $R_k = \dfrac{1}{(k+1)!}\left(\Delta x \dfrac{\partial}{\partial x} + \Delta y \dfrac{\partial}{\partial y}\right)^{k+1} f(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)(0 < \theta < 1)$ 称为 Lagrange 余项.

注. 这里

$$\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^p f(x_0,y_0)=\sum_{i=0}^{p}\mathrm{C}_p^i\frac{\partial^p f}{\partial x^{p-i}\partial y^i}(x_0,y_0)(\Delta x)^{p-i}(\Delta y)^i\quad(p\geqslant 1)\,.$$

推论. 设 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某个邻域上具有 $k+1$ 阶连续偏导数，那么在点 (x_0,y_0) 附近成立

$$\begin{aligned}f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)=f(x_0,y_0)&+\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0,y_0)+\\&\frac{1}{2!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0,y_0)+\cdots+\\&\frac{1}{k!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^k f(x_0,y_0)+o((\sqrt{x^2+y^2})^k)\,.\end{aligned}$$

定理 12.3.4. 设 n 元函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在点 $x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0$ 附近具有 $k+1$ 阶连续偏导数，那么在这点附近成立如下的 Taylor 公式：

$$\begin{aligned}f(x_1^0+\Delta x_1,x_2^0+\Delta x_2,\cdots,x_n^0+\Delta x_n)=&f(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)+\left(\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)f(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)+\\&\frac{1}{2!}\left(\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^2 f(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)+\cdots+\frac{1}{k!}\left(\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^k f(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)+R_k\,,\end{aligned}$$

其中

$$R_k=\frac{1}{(k+1)!}\left(\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^{k+1} f(x_1^0+\Delta x_1,x_2^0+\Delta x_2,\cdots,x_n^0+\Delta x_n),\quad 0<\theta<1$$

为 Lagrange 余项.

12.4 隐函数

定理 12.4.1 (一元隐函数存在定理). 若二元函数 $F(x,y)$ 满足条件：

1. $F(x_0,y_0)=0$；
2. 在闭矩形 $D=\{(x,y)||x-x_0|\leqslant a,|y=y_0|\leqslant b\}$ 上，$F(x,y)$ 连续，且具有连续偏导数；
3. $F_y(x,y)\neq 0$，

那么

1. 在点 (x_0,y_0) 附近可以从函数方程

$$F(x,y)=0$$

惟一确定隐函数

$$y = f(x), \quad x \in O(x, \rho)\ ,$$

它满足 $F(x, f(x)) = 0$，以及 $y_0 = f(x_0)$；

2. 隐函数 $y = f(x)$ 在 $x \in O(x_0, \rho)$ 上连续；

3. 隐函数 $y = f(x)$ 在 $x \in O(x_0, \rho)$ 上有连续的导数，且

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}\ .$$

定理 12.4.2 (多元隐函数存在定理). 若 $n+1$ 元函数 $F(x_1, x_2, \cdots, x_n, y)$ 满足条件：

1. $F(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0, y^0) = 0$；

2. 在闭矩形 $D = \{(x, y) || x_i - x_i^0| \leqslant a, |y = y^0| \leqslant b, i = 1, 2, \cdots, n\}$ 上，$F(x, y)$ 连续，且具有连续偏导数 $F_y, F_{x_i}, i = 1, 2, \cdots, n$；

3. $F_y(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0, y^0) \neq 0$，

那么

1. 在点 $(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0, y^0)$ 附近可以从函数方程

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n, y) = 0$$

惟一确定隐函数

$$y = f(x_1, x_2, \cdots, x_n), \quad x_1, x_2, \cdots, x_n \in O((x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0), \rho)\ ,$$

它满足 $F(x_1, x_2, \cdots, x_n, f(x_1, x_2, \cdots, x_n)) = 0$，以及 $y^0 = f(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$；

2. 隐函数 $y = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 在 $x \in O((x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0), \rho)$ 上连续；

3. 隐函数 $y = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 在 $x \in O((x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0), \rho)$ 上有连续的导数，且

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x_i} = -\frac{F_{x_i}(x_1, x_2, \cdots, x_n, y)}{F_{y_i}(x_1, x_2, \cdots, x_n, y)},\ i = 1, 2, \cdots, n\ .$$

定理 12.4.3 (多元向量值隐函数存在定理). 设函数 $F(x, y, u, v)$ 和 $G(x, y, u, v)$ 满足条件：

1. $F(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0, G(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0$；

2. 在闭长方体

$$D = \{(x, y, u, v) || x - x_0| \leqslant a, |y - y_0| \leqslant b, |u - u_0| \leqslant c, |v - v_0| \leqslant d\}$$

上，函数 F, G 连续，且具有连续偏导数；

3. 在 (x_0,y_0,u_0,v_0) 点，行列式

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}\neq 0\,,$$

那么

1. 在点 x_0,y_0,u_0,v_0 附近可以从函数方程组

$$\begin{cases}F(x,y,u,v)=0\,,G(x,y,u,v) & =0\end{cases}$$

惟一确定向量值隐函数

$$\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f(x,y)\\ g(x,y)\end{pmatrix},\quad (x,y)\in O((x_0,y_0),\rho)\,,$$

它满足 $\begin{cases}F(x,y,f(x,y),g(x,y))=0\,,\\ G(x,y,f(x,y),g(x,y))=0\,,\end{cases}$ 以及 $u_0=f(x_0,y_0),v_0=g(x_0,y_0)$；

2. 这个向量值隐函数在 $O((x_0,y_0),\rho)$ 上连续；

3. 这个向量值隐函数在 $O((x_0,y_0),\rho)$ 上具有连续的导数，且

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y}\\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y}\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}F_x & F_y\\ G_x & G_y\end{pmatrix}\,.$$

定理 12.4.4. 设 m 个 $n+m$ 元函数 $F_i(x_1,x_2,\cdots,x_n,y_1,y_2,\cdots,y_m)(i=1,2,\cdots,m)$ 满足以下条件：

1. $F_i(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0,y_1^0,y_2^0,\cdots,y_m^0)=0,i=1,2,\cdots,m$；

2. 在闭长方体

$$D=\{(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0,y_1^0,y_2^0,\cdots,y_m^0)|$$
$$|x_i-x_i^0|\leqslant a_i,|y_j-y_j^0|\leqslant b_j,i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,m\}$$

上，函数 $F_i(i=1,2,\cdots,m)$ 连续，且具有连续偏导数；

3. 在 $(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0,y_1^0,y_2^0,\cdots,y_m^0)$ 点，Jacobi 行列式

$$\frac{\partial(F_1,F_2,\cdots,F_m)}{\partial(y_1,y_2,\cdots,y_m)}\neq 0\,,$$

那么

1. 在点 $(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0,y_1^0,y_2^0,\cdots,y_m^0)$ 的某个邻域上，可以从函数方程组

$$\begin{cases} F_1(x_1,x_2,\cdots,x_n,y_1,y_2,\cdots,y_m)=0\,, \\ F_2(x_1,x_2,\cdots,x_n,y_1,y_2,\cdots,y_m)=0\,, \\ \qquad\qquad\vdots \\ F_m(x_1,x_2,\cdots,x_n,y_1,y_2,\cdots,y_m)=0\,, \end{cases}$$

惟一确定向量值隐函数

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1,x_2,\cdots,x_n) \\ f_2(x_1,x_2,\cdots,x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1,x_2,\cdots,x_n) \end{pmatrix}, \quad (x_1,x_2,\cdots,x_n)\in O((x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0),\rho)\,,$$

它满足

$$F_i(x_1,x_2,\cdots,x_n,f_1(x_1,x_2,\cdots,x_n),f_2(x_1,x_2,\cdots,x_n),\cdots,f_m(x_1,x_2,\cdots,x_n))=0\,,$$

以及 $y_i^0=f_i(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)(i=1,2,\cdots,m)$；

2. 这个向量值隐函数在 $O((x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0),\rho)$ 上连续；

3. 这个向量值隐函数在 $O((x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0),\rho)$ 上具有连续的导数，且

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \frac{\partial y_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial y_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \frac{\partial F_m}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \frac{\partial F_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

在具体计算向量值隐函数的导数时，通常用以下方法：分别对

$$F_i(x_1,x_2,\cdots,x_n,y_1,y_2,\cdots,y_m)=0, \quad i=1,2,\cdots,m$$

关于 x_j 求偏导，得到

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}+\sum_{k=1}^m \frac{\partial F_i}{\partial y_k}\frac{\partial y_k}{\partial x_j}=0, \quad i=1,2,\cdots,m\,.$$

解这个联立方程组，应用 Cramer 法则得到

$$\frac{\partial y_k}{\partial x_j}=-\frac{\dfrac{\partial(F_1,F_2,\cdots,F_{k-1},F_k,F_{k+1},\cdots,F_m)}{\partial(y_1,y_2,\cdots,y_{k-1},x_j,y_{k+1},\cdots,y_m)}}{\dfrac{\partial(F_1,F_2,\cdots,F_m)}{\partial(y_1,y_2,\cdots,y_m)}}, \quad k=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n\,.$$

定理 12.4.5 (逆映射定理). 设 $P_0=(u_0,v_0)\in D, x_0=x(u_0,v_0), y_0=y(u_0,v_0), P_0'=(x_0,y_0)$，且 f 在 D 上具有连续导数. 如果在 P_0 点处的 Jacobi 行列式

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\neq 0\,,$$

那么存在 P_0' 的一个邻域 $O(P_0',\rho)$，在这个邻域上存在 f 的具有连续导数的逆映射 g：

$$u=u(x,y)\,, v\ =v(x,y)\,,\quad (x,y)\in O(P_0',\rho)\,,$$

满足

1. $u_0=u(x_0,y_0), v_0=v(x_0,y_0)$；
2. $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial y}{\partial v}\Big/\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial x}{\partial v}\Big/\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)},$$
$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial y}{\partial u}\Big/\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial x}{\partial u}\Big/\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\,.$$

定理 12.4.6. 设 D 为 $\mathbb{R}^2$ 中的开集，且映射 $f:D\to\mathbb{R}^2$ 在 D 上具有连续导数. 如果 f 的 Jacobi 行列式在 D 上恒不为零，那么 D 的像集 $f(D)$ 是开集.

12.5 偏导数在几何中的应用

定理 12.5.1. 曲线 $\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\ G(x,y,z)=0\end{cases}$ 在 P_0 点的法平面就是由向量 $\operatorname{grad}F(P_0)$ 和 $\operatorname{grad}G(P_0)$ 张成的过 P_0 的平面.

12.6 无条件极值

定理 12.6.1 (必要条件). 设 x_0 为函数 f 的极值点，且 f 在 x_0 点可偏导，则 f 在 x_0 点的各个一阶偏导数都为 0，即

$$f_{x_1}(x_0)=f_{x_2}(x_0)=\cdots=f_{x_n}(x_0)=0\,.$$

定理 12.6.2. 设 (x_0,y_0) 为 f 的驻点，f 在 (x_0,y_0) 附近具有二阶连续偏导数. 记

$$A=f_{xx}(x_0,y_0),\ B=f_{xy}(x_0,y_0),\ G=f_{yy}(x_0,y_0)\,,$$

并记

$$H=\begin{vmatrix}A & B\\ B & C\end{vmatrix}=AC-B^2\,,$$

那么

1. 若 $H>0$：$A>0$ 时 $f(x_0,y_0)$ 为极小值；$A<0$ 时 $f(x_0,y_0)$ 为极大值；
2. 若 $H<0$：$f(x_0,y_0)$ 不是极值.

定理 12.6.3. 设 n 元函数 $f(x)$ 在 $x_0=(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$ 附近具有二阶连续偏导数，且 x_0 为 $f(x)$ 的驻点，那么当二次型

$$g(\zeta)=\sum_{i,j=1}^{n} f_{x_ix_j}(x_0)\zeta_i\zeta_j$$

正定时，$f(x_0)$ 为极小值；当 $g(\zeta)$ 负定时，$f(x_0)$ 为极大值；当 $g(\zeta)$ 不定时，$f(x_0)$ 不是极值.

推论. 若 $\det A_k>0(k=1,2,\cdots,n)$，则二次型 $g(\xi)$ 是正定的，此时 $f(x_0)$ 为极小值；若 $(-1)^k\det A_k>0(k=1,2,\cdots,n)$，则二次型 $g(\xi)$ 是负定的，此时 $f(x_0)$ 为极大值.

12.7 条件极值与 Lagrange 乘数法

定理 12.7.1 (条件极值的必要条件). 若 $x_0=(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$ 为函数 $f(x)$ 满足约束条件的条件极值点，则必存在 m 个常数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$，使得在 x_0 点成立

$$\mathrm{grad}\, f=\lambda_1\mathrm{grad}\, g_1+\lambda_2\mathrm{grad}\, g_2+\cdots+\lambda_m\mathrm{grad}\, g_m\ .$$

定理 12.7.2. 设点 $x_0=(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$ 及 m 个常数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 满足方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x_k}=\dfrac{\partial f}{\partial x_k}-\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\dfrac{\partial g_i}{\partial x_k}=0\ , \\ \\ g_t=0\ , \end{cases}\qquad (k=1,2,\cdots,n;\ l=1,2,\cdots,m)\ ,$$

则当方阵

$$\left(\frac{\partial^2 L}{\partial x_k\partial x_i}(x_0,\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m)\right)_{n\times n}$$

为正定（负定）矩阵时，x_0 为满足约束条件的条件极小（大）值点，因此 $f(x_0)$ 为满足约束条件的条件极小（大）值.

13 重积分

13.1 有界闭区域上的重积分

定理 13.1.1. 有界点集 D 是可求面积的充分必要条件是它的边界 ∂D 的面积为 0.

定理 13.1.2. 若 $f(x,y)$ 在零边界闭区域 D 上连续，那么它在 D 上可积.

命题. 设 D 为 $\mathbb{R}^2$ 上的零边界闭区域，函数 $z=f(x,y)$ 在 D 上有界. 将 D 用曲线网分成 n 个小区域 $\Delta D_1, \Delta D_2, \cdots, \Delta D_n$，并记所有小区域 ΔD_i 的最大直径为 λ，即

$$\lambda = \max\{\mathrm{diam}\Delta D_i\}\ .$$

在每个 ΔD_i 上任取一点 (ξ_i, η_i)，记 $\Delta\sigma_i$ 为 ΔD_i 的面积.

设 M_i 和 m_i 分别为 $f(x,y)$ 在 ΔD_i 上的上确界和下确界，定义 Darboux 大和为

$$S = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta\sigma_i\ ;$$

Darboux 小和为

$$s = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta\sigma_i\ .$$

则有以下性质：

1. 若在已有的划分上添加有线条曲线作进一步划分，则 Darboux 大和不增，Darboux 小和不减.
2. 任何一个 Darboux 小和都不大于任何一个 Darboux 大和. 因此，若记 $I^* = \inf\{S\}, I_* = \sup\{s\}$（这里上、下确界是对所有划分来取的），则有

$$s \leqslant I_* \leqslant I^* \leqslant S\ .$$

3. $f(x,y)$ 在 D 上可积的充分必要条件是：

$$\lim_{\lambda\to 0}(S-s) = 0\ ,$$

即

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta\sigma_i = 0\ .$$

这里 $\omega_i = M_i - m_i$ 是 $f(x,y)$ 在 ΔD_i 上的振幅. 此时成立

$$\lim_{\lambda\to 0} s = \lim_{\lambda\to 0} S = \iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}\sigma\ .$$

13.2 重积分的性质与计算

命题 (线性性). 设 f 和 g 都在区域 Ω 上可积，α,β 为常数，则 $\alpha f+\beta g$ 在 Ω 上也可积，并且

$$\int_\Omega(\alpha f+\beta g)\mathrm{d}V=\alpha\int_\Omega f\mathrm{d}V+\beta\int_\Omega g\mathrm{d}V\ .$$

命题 (区域可加性). 设区域 Ω 被分成两个内点不相交的区域 Ω_1 和 Ω_2，如果 f 在 Ω 上可积，则 f 在 Ω_1 和 Ω_2 上都可积；反之，如果 f 在 Ω_1 和 Ω_2 上可积，则 f 也在 Ω 上可积. 此时成立

$$\int_\Omega f\mathrm{d}V=\int_{\Omega_1}f\mathrm{d}V+\int_{\Omega_2}f\mathrm{d}V\ .$$

14 曲线积分、曲面积分与场论

14.1 第一类曲线积分与第一类曲面积分

定义 14.1.1 (第一类曲线积分). 设 L 是空间 $\mathbb{R}^3$ 上一条可求长的连续曲线，其端点为 A 和 B，函数 $f(x,y,z)$ 在 L 上有界. 令 $A=P_0,B=P_n$. 在 L 上从 A 到 B 顺序地插入分点 $P_1,P_2,\cdots,P_{n-1}$，再分别在每个小弧段 $P_{i-1}P_i$ 上任取一点 (ξ_i,η_i,ζ_i)，并记第 i 个小弧段 $P_{i-1}P_i$ 的长度为 $\Delta s_i(i=1,2,\cdots,n)$，作和式

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta s_i\ .$$

如果当所有小弧段的最大长度 λ 趋于零时，这个和式的极限存在，且与分点 $\{P_i\}$ 的取法及 $P_{i-1}P_i$ 上的点 (ξ_i,η_i,ζ_i) 的取法无关，则称这个极限值为 $f(x,y,z)$ 在曲线 L 上的第一类曲线积分，记为

$$\int\limits_L f(x,y,z)\mathrm{d}s \quad \text{或} \quad \int\limits_L f(P)\mathrm{d}S\ .$$

即

$$\int\limits_L f(x,y,z)\mathrm{d}s=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta s_i\ ,$$

其中 $f(x,y,z)$ 称为被积函数，L 称为积分路径.

定义 14.1.2 (第一类曲面积分). 设曲面 $\varSigma$ 为有界光滑（或分片光滑）曲面，函数 $f(x,y,z)$ 在 $\varSigma$ 上有界. 将曲面 $\varSigma$ 用一个光滑曲线网分成 n 片小区面 $\Delta\varSigma_1,\Delta\varSigma_2,\cdots,\Delta\varSigma_n$，并记 $\Delta\varSigma_i$

的面积为 ΔS_i. 在每片 $\Delta\Sigma_i$ 上任取一点 (ξ_i,η_i,ζ_i)，作和式

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i \, .$$

如果当所有小曲面 $\Delta\Sigma_i$ 的最大直径 λ 趋于 0 时，这个和式的极限存在，且极限值与小曲面的分发和点 (ξ_i,η_i,ζ_i) 的取法无关，则称此极限值为 $f(x,y,z)$ 在曲面 Σ 上的第一类曲面积分，记为 $\displaystyle\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S$，即

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i \, ,$$

其中 $f(x,y,z)$ 称为被积函数，Σ 称为积分曲面.

定理 14.1.1. 设 L 为光滑曲线，函数 $f(x,y,z)$ 在 L 上连续，则 $f(x,y,z)$ 在 L 上的第一类曲线积分存在，且

$$\int\limits_{L} f(x,y,z)\mathrm{d}s = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\mathrm{d}t \, .$$

定理 14.1.2. 对于有界光滑曲面 Σ，可以计算其面积为

$$S = \iint\limits_{D} \sqrt{EG-F^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v \, ,$$

其中

$$E = \mathbf{r}_u\cdot\mathbf{r}_u = x_u^2+y_u^2+z_u^2 \, ,$$

$$F = \mathbf{r}_u\cdot\mathbf{r}_v = x_ux_v+y_uy_v+z_uz_v \, ,$$

$$G = \mathbf{r}_v\cdot\mathbf{r}_v = x_v^2+y_v^2+z_v^2 \, ,$$

它称为曲面的 Gauss 系数.

命题 (第一类曲线积分的线性性). 如果函数 f,g 在 L 上的第一类曲线积分存在，则对于任何常数 $\alpha,\beta,\alpha f+\beta g$ 在 L 上的第一类曲线积分存在，且成立

$$\int\limits_{L}(\alpha f+\beta g)\mathrm{d}s = \alpha\int\limits_{L} f\mathrm{d}s + \beta\int\limits_{L} g\mathrm{d}s \, .$$

命题 (第一类曲线积分的路径可加性). 设曲线 L 分成了两段 L_1,L_2. 如果函数 f 在 L 上的第一类曲线积分存在，则它在 L_1 和 L_2 上的第一类曲线积分也存在. 反之，如果函数 f 在 L_1 和 L_2 上的第一类曲线积分存在，则它在 L 上的第一类曲线积分也存在. 并成立

$$\int\limits_{L} f\mathrm{d}s = \int\limits_{L_1} f\mathrm{d}s + \int\limits_{L_2} f\mathrm{d}s \, .$$

附录 A　实数系基本定理之间的等价证明

A.1　九个实数系基本定理的叙述

定理 A.1 (确界存在定理). 非空有上界的数集必有上确界，非空有下界的数集必有下确界.

定理 A.2 (单调有界定理). 单调有界数列必定收敛.

定理 A.3 (闭区间套定理). 如果 $\{[a_n, b_n]\}$ 形成一个闭区间套，则存在唯一的实数 ξ 属于所有的闭区间 $[a_n, b_n]$，且 $\xi = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

定理 A.4 (Heine–Borel 有限覆盖定理). 设 Δ 是闭区间 $[a, b]$ 的一个无限开覆盖，则从 Δ 中可以选出有限个开覆盖 $[a, b]$.

定理 A.5 (Bolzano–Weierstrass 定理). 有界数列必有收敛子列.

定理 A.6 (Cauchy 收敛原理). 数列 $\{x_n\}$ 收敛的充分必要条件是：$\{x_n\}$ 是基本数列.

定理 A.7 (Dedekind 分割定理). 设 $\tilde{A}/\tilde{B}$ 是实数集 $\mathbb{R}$ 的一个切割，则或者 $\tilde{A}$ 有最大数，或者 $\tilde{B}$ 有最小数.

定理 A.8 (Weierstrass 聚点原理). 设 E 是有界无限的实数点集，则 E 至少有一个聚点.

定理 A.9 (介值定理). 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，则它一定能取到最大值 $M = \max\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$ 和最小值 $m = \min\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$ 之间的任何一个值.

A.2　用确界存在定理证明其它定理

A.2.1　单调有界定理

证. 不妨设 $\{x_n\}$ 单调增加且有上界. 根据确界存在定理，由 $\{x_n\}$ 构成的数集必有上确界 β，满足：

1. $\forall n \in \mathbb{N}^+, x_n \leqslant \beta$；

2. $\forall \varepsilon > 0, \exists\, x_{n_0}, x_{n_0} > \beta - \varepsilon$.

取 $N=n_0$，对 $\forall n>N$ 有

$$\beta-\varepsilon<x_{n_0}\leqslant x_n\leqslant\beta\ ,$$

因而 $|x_n-\beta|<\varepsilon$，于是得到

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\beta\ .$$

□

A.3 用单调有界定理证明其它定理

A.3.1 闭区间套定理

证. 设 $\{[a_n,b_n]\}$ 构成闭区间套. 则有

$$\begin{cases}[a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n],\ n=1,2,3,\cdots\\ \lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0\ .\end{cases}$$

于是有

$$a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n\leqslant b_n\leqslant\cdots\leqslant b_2\leqslant b_1\ ,\ n=1,2,3,\cdots$$

于是 $\{a_n\}$ 单调增加且有上界，$\{b_n\}$ 单调下降且有下界. 由单调有界定理，数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 极限存在.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\xi,\ \lim\limits_{n\to\infty}b_n=\xi'$. 于是有

$$\xi'=\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)+\lim_{n\to\infty}a_n=0+\xi=\xi\ .$$

于是 $\xi=\xi'$. 考虑到 $a_n\leqslant\xi\leqslant b_n$ ，于是有 ξ 属于闭区间套中所有的闭区间.

再证 ξ 唯一. 若 ξ 不唯一，设存在 $\xi''\neq\xi$ 属于所有的闭区间. 有 $a_n\leqslant\xi''\leqslant b_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\xi$，由夹逼定理知道 $\xi''=\xi$，出现矛盾. 于是有 ξ 唯一. □

A.4 用闭区间套定理证明其它定理

A.4.1 单调有界定理

证. 设数列 $\{a_n\}$ 单调增有上界，其一个上界为 M.

下构造一个闭区间套 $\{[l_n, r_n]\}$. 令 $l_1 = a_1, r_1 = M$. 设 $m_1 = \dfrac{l_1 + r_1}{2}$，考虑 $[l_1, m_1]$，$[m_1, r_1]$ 两个闭区间. 若 $[m_1, r_1]$ 中含有 $\{a_n\}$ 中的项，则令 $[l_2, r_2] = [m_1, r_1]$，否则令 $[l_2, r_2] = [l_1, m_1]$. 于是有 $[l_2, r_2]$ 中一定有 $\{a_n\}$ 中的项，且 r_2 一定是 $\{a_n\}$ 的上界. 类似地，令 $m_2 = \dfrac{l_2 + r_2}{2}$，若 $[m_2, r_2]$ 中含有数列 $\{a_n\}$ 中的项，则令 $[l_3, r_3] = [m_2, r_2]$，否则令 $[l_3, r_3] = [l_2, m_2]$. 依此类推可以构造出一列闭区间. 显然有 $\lim\limits_{n\to\infty}(r_n - l_n) = 0$，并且 $[l_{n+1}, r_{n+1}] \subset [l_n, r_n], n = 1, 2, 3, \cdots$，故有 $\{[l_n, r_n]\}$ 形成闭区间套，且每一个闭区间中都有 $\{a_n\}$ 中的项存在，每一个 r_n 都是 $\{a_n\}$ 的上界.

由闭区间套定理知道存在唯一的 ξ 属于闭区间套中所有的闭区间. 下证明数列 $\{a_n\}$ 收敛于 ξ. 对 $\forall \varepsilon > 0$，一定可以取到一个闭区间 $[l_p, r_p]$，使得 $r_p - l_p < \dfrac{\varepsilon}{2}$. 由闭区间套构造过程知道 $\{a_n\}$ 中存在项落在区间 $[l_p, r_p]$ 中. 设其为 a_q. 则取 $N = q$，对 $\forall n > N$，有 $l_p \leqslant a_N \leqslant a_n \leqslant r_p$，又知道 $\xi \in [l_p, r_p]$，于是有 $|a_n - \xi| \leqslant |a_n - l_p| + |\xi - l_p| < \varepsilon$. 从而数列 $\{a_n\}$ 收敛. □

A.4.2 Bolzano–Weierstrass 定理

证. 设数列 $\{a_n\}$ 有界，即有 $M > 0$，满足 $M > a_n,\ n = 1, 2, 3, \cdots$. 下构建一个闭区间套 $\{[l_n, r_n]\}$.

1. 令 $a_1 = -M, b_1 = M$.
2. 数列 $\{a_n\}$ 一定有无穷项在 $[l_1, r_1]$ 内. 将其一分为二，设 $m_1 = \dfrac{l_1 + r_1}{2}$，考虑两个闭区间 $[l_1, m_1], [m_1, r_1]$，至少有一个区间内包含无穷项数列项. 可以令其为 $[l_2, r_2]$.
3. 依此类推，对 $\forall n \in \mathbb{N}^+$，可以构造出闭区间 $[l_n, r_n]$.

有 $\lim\limits_{n\to\infty}(r_n - l_n) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2M}{2^{n-1}} = 0$，且显然有 $[l_{n+1}, rb_{n+1}] \subset [l_n, r_n]$，于是有 $\{[l_n, r_n]\}$ 构成一个闭区间套. 由闭区间套定理，存在唯一的 ξ 属于闭区间套中所有的闭区间.

下构造一个收敛至 ξ 的子列 $\{a_{n_k}\}$. 由于数列 $\{a_n\}$ 中有无穷项在 $[l_n, r_n]$ 中，故可以取 $a_{n_1} \in [l_1, r_1]$. 然后可以取 $n_2 > n_1$，使得 $a_{n_2} \in [l_2, r_2]$. 依此类推，可以构造出子列 $\{a_{n_k}\}$. 因为 $l_p \leqslant a_{n_p} \leqslant r_p$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} l_p = \lim\limits_{n\to\infty} r_p = \xi$，由夹逼定理知道 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n_p} = \xi$，这个子列收敛. □

A.5 用 Heine–Borel 有限覆盖定理证明其它定理

A.5.1 Weierstrass 聚点原理

证. 用反证法. 设 E 没有聚点.

由于 E 有界，存在 $[a,b]$，使得 $E \subset [a,b]$. $\forall \varepsilon \in [a,b]$，有 ε 不是 E 的聚点，则存在 ξ 的邻域 $U(\xi,\delta_\varepsilon)$，使得 $\overset{\circ}{U}(\xi,\delta_\varepsilon) \cap E = \emptyset$. 即除了 ξ 之外，ξ 的邻域 $U(\xi,\delta_\varepsilon)$ 中没有 E 的点.

记 $\Delta = \{U(\xi,\delta_\varepsilon) \,|\, \xi \in [a,b]\}$，则 Δ 是 $[a,b]$ 的开覆盖. 根据 Heine-Borel 有限覆盖定理知道存在 Δ 中有限的开区间 $\{U(\xi_i) \,|\, \xi_i \in [a,b], i = 1,2,\cdots,n\}$ 覆盖 $[a,b]$，即 $[a,b] \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} U(\xi_i)$，自然有 $E \subset [a,b] \subset \bigcup\limits_{i_1}^{n} U(\xi_i)$. 根据假设 $\bigcup\limits_{i_1}^{n} \overset{\circ}{U}(\xi_i) \cap E = \emptyset$，从而 E 是有限集，且 $E \subset \{\xi_1,\xi_2,\xi_3,\cdots\}$. 这与 E 是无限集矛盾. □

A.6 用 Bolzano–Weierstrass 定理证明其它定理

A.6.1 Cauchy 收敛原理

证. $\Rightarrow$) 设数列 $\{a_n\}$ 收敛，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$. 则对 $\forall \varepsilon > 0$，存在 $N > \mathbb{N}^+$，使得 $\forall n > N$，有 $|a_n - A| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$. 取 $N' = N$，则有对 $\forall n,m > N$，有

$$|a_n - a_m| \leqslant |a_n - A| + |a_m - A| < \varepsilon\,.$$

于是 $\{a_n\}$ 是基本数列.

$\Leftarrow$) 设数列 $\{a_n\}$ 是基本数列.

先证数列 $\{a_n\}$ 有界. 取 $\varepsilon = 1$，则存在 N，对 $\forall n > N$，有 $|a_n - a_N| \leqslant \varepsilon = 1$. 令 $M = \max\{|a_1|,|a_2|,\cdots,|a_N|,|a_N|+1\}$，则有 $M \geqslant |a_n|$, $n = 1,2,3,\cdots$. 于是有数列 $\{a_n\}$ 有界.

再证数列 $\{a_n\}$ 收敛. 由于数列 $\{a_n\}$ 是基本数列，故存在 $M \in \mathbb{N}^+$，使得 $\forall p,q > M$，有

$$|x_p - x_q| < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

又由 Bolzano–Weierstrass 定理，数列 $\{a_n\}$ 存在子列 $\{a_{n_k}\}$ 收敛. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n_k} = \xi$. 则对 $\forall \varepsilon > 0$，一定能取到 $N > M$，使得 $\forall k > N$，使得

$$|a_{n_k} - \xi| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

于是对 $\forall n > n_N$，有

$$|a_n - \xi| \leqslant |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - \xi| \leqslant \varepsilon\ .$$

于是数列 $\{a_n\}$ 收敛向 ξ. $\square$

A.7 用 Cauchy 收敛原理证明其它定理

A.8 用 Dedekind 分割定理证明其它定理

A.9 用 Weierstrass 聚点原理证明其它定理

A.9.1 Bolzano–Weierstrass 定理

证. 设 $\{a_n\}$ 为有界数列，$B = \{a_n \,|\, n = 1, 2, 3, \cdots\}$. 下对 B 分类讨论.

当 B 为有限集时，设 $B = \{b_1, b_2, \cdots, b_m\}$. 则一定存在 b_p，有 b_p 在数列 $\{a_n\}$ 中出现无限次（若不然，则有 B 中所有项在数列 $\{a_n\}$ 中出现有限次，而 B 又是有限集，从而 $\{a_n\}$ 是有限数列，矛盾）. 则将 $\{a_n\}$ 中所有等于 b_p 的项提取出来成为一个子列 $\{a_{n_k}\}$，则有这个子列为常数列，显然收敛.

当 B 为无限集时，由于数列 $\{a_n\}$ 有界，故 B 也有界. 由 Weierstrass 聚点原理知道 B 中一定存在聚点 ξ. 下试构造一个 $\{a_n\}$ 收敛至 ξ 的子列 $\{a_{n_k}\}$. 设 $a_{n_1} = a_p$，其中 a_p 为数列 $\{a_n\}$ 中第一个不等于 ξ 的项. 由聚点定义知道 $\mathring{U}(\xi, \dfrac{1}{n})$ 中有无限个 $\{a_n\}$ 中的项，于是可以取到 $n_2 > n_1$，使得 $a_{n_2} \in \mathring{U}(\xi, \dfrac{1}{2})$. 同理可以取到 $n_3 > n_2$，使得 $a_{n_3} \in \mathring{U}(\xi, \dfrac{1}{3})$. 依此类推可以得到数列 $\{a_{n_k}\}$，其中 $a_{n_k} \in \mathring{U}(\xi, \dfrac{1}{n})$，从而有此数列收敛. $\square$

A.10 用连续函数介值定理证明其它定理

附录 B 常用结论

B.1 常用等价无穷小

- $\sin \sim x (x \to 0)$
- $\arcsin x \sim x (x \to 0)$

- $1-\cos x \sim \dfrac{1}{2}x^2 (x \to 0)$
- $\tan x \sim x (x \to 0)$
- $\arctan x \sim x (x \to 0)$
- $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x (x \to 0)$
- $e^x - 1 \sim x (x \to 0)$
- $\ln(1+x) \sim x (x \to 0)$
- $\tan x - \sin x \sim \dfrac{1}{2}x^3$

附录 C 导数表

$$(C)' = 0 \qquad \mathrm{d}(C) = 0 \cdot \mathrm{d}x = 0$$

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \qquad \mathrm{d}(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1}\mathrm{d}x$$

$$(\sin x)' = \cos x \qquad \mathrm{d}(\sin x) = \cos x\mathrm{d}x$$

$$(\cos x)' = -\sin x \qquad \mathrm{d}(\cos x) = -\sin x\mathrm{d}x$$

$$(\tan x)' = \sec^2 x \qquad \mathrm{d}(\tan x) = \sec^2 x\mathrm{d}x$$

$$(\cot x)' = -\csc^2 x \qquad \mathrm{d}(\cot x) = -\csc^2 x\mathrm{d}x$$

$$(\sec x)' = \tan x \sec x \qquad \mathrm{d}(\sec x) = \tan x \sec x\mathrm{d}x$$

$$(\csc x)' = -\cot x \csc x \qquad \mathrm{d}(\csc x) = -\cot x \csc x\mathrm{d}x$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \mathrm{d}(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{a-x^2}} \qquad \mathrm{d}(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{a-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \qquad \mathrm{d}(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$(\mathrm{arccot}\, x)' = -\frac{1}{1+x^2} \qquad \mathrm{d}(\mathrm{arccot}\, x) = -\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$(a^x)' = \ln a \cdot a^x \qquad \mathrm{d}(a^x) = \ln a \cdot a^x\mathrm{d}x$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a} \qquad \mathrm{d}(\log_a x) = \frac{1}{x\ln a}\mathrm{d}x$$

$$(\sinh x)' = \cosh x \qquad \mathrm{d}(\sinh x) = \cosh x\mathrm{d}x$$

$$(\cosh x)' = \sinh x \qquad \mathrm{d}(\cosh x) = \sinh x\mathrm{d}x$$

$$(\tanh x)' = \mathrm{sech}^2 x \qquad \mathrm{d}(\tanh x) = \mathrm{sech}^2 x\mathrm{d}x$$

$$(\coth x)' = -\mathrm{csch}^2 x \qquad \mathrm{d}(\coth x) = -\mathrm{csch}^2 x\mathrm{d}x$$

$$(\sinh^{-1} x)' = \frac{1}{1+x^2} \qquad \mathrm{d}(\sinh^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$(\cosh^{-1} x)' = \frac{1}{x^2-1} \qquad \mathrm{d}(\cosh^{-1} x) = \frac{1}{x^2-1}\mathrm{d}x$$

$$(\tanh^{-1} x)' = (\coth^{-1} x)' = \frac{1}{1-x^2} \qquad \mathrm{d}(\tanh^{-1} x) = \mathrm{d}(\coth^{-1} x) = \frac{1}{1-x^2}\mathrm{d}x$$

附录 D　基本积分表

$$\int x^{\alpha}\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C\,, & \alpha \neq -1 \\ \ln|x| + C\,, & \alpha = -1 \end{cases} \qquad \int \ln x\mathrm{d}x = x(\ln x - 1) + C$$

$$\int a^x\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C\,,\text{特别地}\int e^x\mathrm{d}x = e^x + C$$

$$\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C \qquad \int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C$$

$$\int \tan x\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C \qquad \int \cot x\mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C$$

$$\int \sec x\mathrm{d}x = \ln|\sec x + \tan x| + C \qquad \int \csc x = \ln|\csc x - \cot x| + C$$

$$\int \sinh x\mathrm{d}x = \cosh x + C \qquad \int \cosh x\mathrm{d}x = \sinh x + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$$

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm a^2\ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}|\right) \quad +C\,.$$